

①

Символ дифференциального оператора.
Эллиптические диф. операторы 1-го порядка.

$$\sum_{k=0}^m \sum_{i_1+\dots+i_n=k} A_{i_1, \dots, i_n}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = f(x).$$

$$\hat{L}u = f.$$

Опр. Символом диф. оператора $\hat{L}$ наз. ф-я smbl $\hat{L} = L$.

$$\text{smbl } \hat{L} = \sum_{k=0}^m \sum_{i_1+\dots+i_n=k} A_{i_1, \dots, i_n}^k(x) \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n}.$$

Главный символ: $-\|$ -, только A^m .

ord $\hat{L}$ - порядок оп-ра $\hat{L}$.

Опр. Оператор $\hat{L}$ наз. эллиптическим, в области G , если $\forall x \in G$ его главный символ smbl $\hat{L}$ не обращается в ноль при $\xi \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$.

② Постановка задачи, корректность, пример Адамара.

1) Коши: (шперд. тип)

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \text{div}(\rho \text{grad} u) - qu + F(x, t) \\ u|_{t=0} = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x) \\ F \in C(t > 0) \\ u_0(x) \in C^1(\mathbb{R}^n) \\ u_1(x) \in C(\mathbb{R}^n) \\ u \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0) \end{cases}$$

2) корректность

1. решение $\exists$

2. решение!

3. непрерывная зависимость от правых частей и нач. (гр.) условий.

3) Пример

M_1, M_2 - попер. евкл. пр-ва

$$L: M_1 \rightarrow M_2 \quad \forall f \in M_2$$

$\{P_k\}$ - нач.

$$D_k \rightarrow 0 \text{ в } M_1 \Rightarrow u_k \rightarrow u$$

$$\begin{cases} Lu = f \\ \ker L = 0 \end{cases}$$

$$\ker L = 0$$

4) Пример Адамар

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = \frac{1}{k} \sin(kx) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{\sinh(kt)}{k^2} \cdot \sin kx \quad (\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2})$$

$$] k \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{k} \sin(kx) \approx 0$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x,t) \neq 0 \Rightarrow$ нет непрер. зав. $\Rightarrow$ задача некорректная.

③ Пр-во основных ф-й D .

Пример сходящейся посл-ти в D

Непр-во операции дифференцирования

Опр. Основной ф-ей наз. бесконечно дифференцируемая финитная ф-я.

Финитная $\equiv$ с компактным носителем.

Носитель супр-закрытие множества точек, где ф-я отлична от нуля.

Опр ли-во основных ф-й с введенной на нем структурой линейного пространства и сходимостью наз-вается пр-вом основных ф-й $D(\mathbb{R}^n)$

1) структура ЛП.

i) $\forall f, g \in D(\mathbb{R}^n)$ опр $(f+g)$ - поточечное слож.

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ (с)} \text{ опр. } \lambda f, \forall f \in D$.

2) Сходимость:

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \Rightarrow \varphi \in D$ вместе со всеми произв.

i) $\forall \alpha, \partial^\alpha f_k \Rightarrow \partial^\alpha \varphi$ (?)

ii) $f_k \rightarrow 0$ в D , если

$\forall \alpha \partial^\alpha f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

ii) $\exists R > 0: \text{supp } f_k \subset V_R$ (шар)

Оператор диф-я в $D(\mathbb{R}^n)$ эвл. непрерывности

Пример:

$\{D^\beta f_k\} \rightarrow 0$ в $D(\mathbb{R}^n)$, г.к. $\forall \alpha \partial^\alpha (D^\beta f_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$,
 $\exists V_R$, что $\text{supp } \partial^\alpha (D^\beta f_k) \subset V_R$.

(4) Пр-во обобщ. ф-й D'
Регулярные и сингулярные обобщ. ф-и.
Тождество 0 обобщ. ф-и. Нулевое мн-во.

Опр Линейный непр. функционал, заданный на $D(\mathbb{R}^n)$ называется обобщенной ф-ей.

(f, φ) -действие ф-и f на $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

1) линейность:

$\forall \varphi, \psi \in D(\mathbb{R}^n), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(C)$.

$$(\cancel{f}, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi)$$

2) непрерывность:

$$\{f_k\} \xrightarrow[\text{сх-во в } D.]{} 0 \text{ в } D(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (f, f_k) \xrightarrow[\text{число в смысле метрики топологии нос.}]{\text{в смысле}} 0$$

Опр Пр-во обобщ. ф-й $D'(\mathbb{R}^n)$ - мн-во обобщ. ф-й с введенной на нем структурой ЛП.

Сходимость в $D'(\mathbb{R}^n)$

$\{f_k\} \rightarrow f$ в $D'(\mathbb{R}^n)$, если $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$:

$$(f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi)$$

(или $f_k \rightarrow 0 \Leftrightarrow (f_k, \varphi) \rightarrow 0 \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$).

Опр Обобщ. ф-я $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ равна 0 в обл. G , если

$$\forall \varphi \in D(G): (f, \varphi) = 0.$$

$(\text{supp } f \subset G)$
 $G \subset \mathbb{R}^n$

Опр $f = g \subset G \Leftrightarrow f - g = 0 \subset G$.

Теор. $\exists f \in D'(\mathbb{R}^n)$ равна 0 в некоторой ~~области~~ окр-ти каждой точки области G , то она будет $= 0$ в G .

Опр Нулевым множеством f называется объединение всех окр-тей точек, в которых $f = 0$. Обозн. Of .

Опр $\text{Supp } f = \mathbb{R}^n \setminus Of$.

Опр $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ - финитна, если ее носитель компактен.

Опр Регулярными обобщ. ф-ями наз. ф-я $f \in D'(\mathbb{R}^n)$, если для нее $\exists g$: локально инт-ная и $(f, \varphi) = \int g(x) \cdot \varphi(x) dx$
 $\Rightarrow f = g$.

$f = g$, если $\forall \varphi \in D'(\mathbb{R}^n) (f, \varphi) = (g, \varphi)$.

Лемма (Дюбуа - Реймона)! (5)

Для того, чтобы лок. инт. ф-я в G $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ н.в.

Пример (6)

$f(x) = x^2$, $f(x) = x^2$ - лок. инт., хотя не инт. на $(-\infty; +\infty)$

$f(x) \leftrightarrow \tilde{f}(x)$ - гр-л. $\forall \varphi(x) \in D: (\tilde{f}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx$ - регул.

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\tilde{\theta}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$$

Не регул. $\Rightarrow$ сингулярная.

δ -ф-я. $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ - мин. непр гр-л $\delta \in D'(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \delta = \{0\}$

(7)

Р-м Сохоцкого

$$(P_x^1, \varphi) = \text{V.p.} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

P_x^1 - гр-л Сохоцкого на $(\mathbb{R}^1)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)}{x} dx - i\pi \varphi(0) + \text{V.p.} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x + i\varepsilon} = \frac{1}{x + i0} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x + i0} = -i\pi \cdot \delta'(x) + P_x^1 - \text{гр. Сохоцкого.}$$

$$\frac{1}{x - i0} = i\pi \delta'(x) + P_x^1, \text{ если } \lim_{\varepsilon \rightarrow -0}$$

(8). Операции над обобщ. ф-ами

1) Лин. замена переменных.

$$x = Ay + b, \quad |A| \neq 0; \quad y = A^{-1}(x - b) \quad (|A| = \det A)$$

$f(x)$ - лок. инт

$$(f(Ay + b), \varphi(y)) = \frac{(f, \varphi(A^{-1}(x - b)))}{|A|}, \quad f \in D'(\mathbb{R}^n), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

$$P(\delta(x - x_0), \varphi) = (\delta, \varphi(x + x_0)) = \varphi(x_0) \cdot (P)$$

2) умнож. на гладкую функцию.

$a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $f(x)$ - лок. инт.

$$(af, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x) f(x) \varphi(x) dx = (f, a\varphi)$$

$$a\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

3) Интегрирование:

$$f \in C^p(\mathbb{R}^n)$$

$$(\partial^\alpha f, \varphi) = \int \partial^\alpha f(x) \cdot \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int f(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx = -1$$

$$= (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi), \text{ где } f \in D', \varphi \in D - \text{ произв. одобу. ф-ции.}$$

⑨ Произв. кус-падной $f \in C'(x \leq x_0)$
 $f \in C'(x > x_0)$, $\theta(x)$. Одобу. на многом. сущах

~~к 6:~~

~~Пространство~~

$$\text{Опр } f \in D'(\mathbb{R}^n), \varphi \in D(\mathbb{R}^n) : (\partial f, \varphi) = -(f, \partial \varphi)$$

свойства:

- 1) одобу. пр. пер. в $D(\mathbb{R}^n)$
- 2) замена пер. пер. в $D(\mathbb{R}^n)$
- 3) $\forall$ об. ор. ∞ груп. в об. смысле.
- 4) ...

Ф. Лейбница

$$a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), f \in D'(\mathbb{R}^n), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

$$\frac{\partial(a, f)}{\partial x_1} = \frac{\partial a}{\partial x_1} f + a \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$\text{Пр-т. } \frac{1}{\varepsilon} \delta(x-\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \delta(x) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \delta(x-\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \delta(x) \right), \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} [\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)] \right) = \varphi'(0) = \\ = (\delta, \varphi') = -(\delta', \varphi)$$

Производная в разрыве $\neq$ роде $x=0$

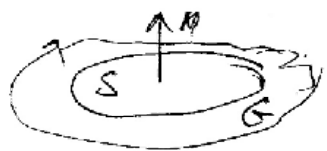
$$f'(x) = f'(x) + [f]_{x=0} \delta(x), \text{ где } f'(x) - \text{классич. произв.}$$

$$\text{кроме т. } x=0, [f]_{x=0} = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) - \lim_{x \rightarrow -0} f(x) - \text{величина скачка.}$$

$$\delta(x) = \delta(x-x_0)$$

$$f'(x) = \{f'(x)\} + [f(x)]_{x_0} \delta(x-x_0)$$

Многомерный случай



S - пов-ть

G - область

n - нормаль

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \int_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz =$$

компл-т - направляющие вектора нормали

Частный случай

$$\int_S p \cos(n, x_k) ds = \int_G \frac{\partial p}{\partial x_k} dx$$

$$\int_G p \frac{\partial Q}{\partial x_k} dx = \int_G \frac{\partial}{\partial x_k} (p \cdot Q) dx - \int_G Q \frac{\partial p}{\partial x_k} dx \quad - \text{ по частям}$$

Простой слой

$$(\mu_S, \varphi) = \int_S \mu(x) \cdot \varphi(x) ds, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n) - \text{обобщ. ф. с носит. } S.$$

$\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ - плотность простого слоя

Об. слой

$$(-\frac{\partial}{\partial n}(\nabla \varphi), \varphi) = \iint_S \nabla(x) \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds, \quad \nabla(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) - \text{пл. об. слоя.}$$

11. Прямое произв. обобщ. функций.

$\exists f(x), g(y) - x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ - лок. инт. $\Rightarrow$
 $f(x) \cdot g(y)$ - инт. в $\mathbb{R}^{n+m}$.

$$\varphi(x, y) \in D(\mathbb{R}^{n+m})$$

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi) = (g(y), (f(x), \varphi(x, y)))$$

Оп. 1. $\exists f(x) \in D'(\mathbb{R}^n), g(y) \in D'(\mathbb{R}^m), \varphi \in D(\mathbb{R}^{n+m})$

Прямое произведение $f(x) \cdot g(y)$ о.ф.

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y)))$$

Св-ва:

$$(g(y), \varphi(x, y)) \in D.$$

1) локальность

2) транзитивность

3) Св-ва прямого произв.

1) $f(x) \cdot g(y)$ линейна и непр. по f (из $D'(\mathbb{R}^n)$ в $D'(\mathbb{R}^{n+m})$)

2) Ассоциативность: $f(x) \cdot [g(y) \cdot h(z)] = (f(x) \cdot g(y)) \cdot h(z).$

3) Коммутативн.

4) Дифференциальность

5) Умнож. на а(x) $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $a(x) (f(x) \cdot g(y)) = (a(x) f(x)) \cdot g(y)$

6) Сдвиг: $(f \cdot g)(x+h, y) = f(x+h) \cdot g(y).$

(12) Свертка адобу. φ - ψ .

$f(x), g(x)$ - лок. инт. φ -ч.

$$(f * g)(x) = \int f(y) \cdot g(x-y) dy = \int g(y) \cdot f(x-y) dy - \text{свертка.}$$

Свертка лок. инт-ма.

$$(f * g, \varphi) = \iint f(x) \cdot g(y) \cdot \varphi(x+y) dx dy$$

Опр. $f \in D'(R^n), g \in D'(R^n), \varphi \in D(R^n) \Rightarrow (f * g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y)) =$
 $= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \varphi_k(x, y) \cdot \varphi(x+y)), \varphi_k(x, y) = \varphi(x+y) \cdot \chi_{V_k}$ - лок. инт. φ -ч, $\chi_{V_k} \in D(R^{2n})$
 $\forall k \Rightarrow \varphi_k(x, y) \cdot \varphi(x+y) \in D(R^{2n})$

(13) Дост. усл. $\exists$ свертки

1) f и g лок. инт. из φ -ч f или g - функциа:

$$\text{supp } g \subset V_S$$

$$\int_{V_R} h(x) dx = \int_{V_S} |g(y)| \int_{V_R} |f(x-y)| dx dy \leq \int_{V_S} |g(y)| dy \cdot \int_{V_{R+S}} |f(\xi)| d\xi$$

$$\Rightarrow h(x) - \text{лок. инт.} \Rightarrow \text{свертка } (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(y) f(x-y) dy \exists.$$

2) f и g ообр. $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ при $x < 0, h = 1$

$$\int_{-R}^R h(x) dx = \int_{-R}^R \int_{\mathbb{R}} |g(y)| |f(x-y)| dy dx \leq \int_{-R}^R |g(y)| dy \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(\xi)| d\xi < \infty$$

$$\Rightarrow h(x) - \text{лок. инт.} \Rightarrow \exists \text{ свертка}$$

3) f и g инт. в $\mathbb{R}^n$.

Сб-ва свертки:

1) $f * \delta = \delta * f$

2) $(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2) * g = (\lambda_1 \cdot f_1 * g) + (\lambda_2 \cdot f_2 * g)$

3) непрерывность: $D'(R^n) \rightarrow D'(R^n)$, не явл. непр. оп.

4) коммут.: $\exists f * g \Rightarrow \exists g * f$ и $f * g = g * f$.

5) $f * g \in D'(R^n)$

6) $*$ не существует (пример)

$$\begin{cases} g(x) = \theta(x) \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

7) $\exists \partial^\alpha f * g = \partial^\alpha (f * g) = f * \partial^\alpha g$

8) Сб-ва

$$\exists f * g \Rightarrow \exists f(x+h) + g(x); f(x+h) + g(x) = (f * g)(x+h)$$

9) $\exists f * g \Rightarrow \exists \partial^\alpha f * g$ и $f * \partial^\alpha g$, но из $\exists \partial^\alpha f * g$ и $\exists f * \partial^\alpha g$ не следует $\exists f * g$.

Дост. усл. $\exists$ свертки:

$$f \in D'(\mathbb{R}^n), g \in D'(\mathbb{R}^n), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

$$(f * g, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x, y) \cdot \varphi(x+y)) \quad \eta_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1 \text{ в } \mathbb{R}^{2n}$$

Теор (о $\exists$ свертки финитной φ -фн)

$\exists f \in D'(\mathbb{R}^n) - \forall$ ободис. φ -я, $g \in D'(\mathbb{R}^n) -$ фин. ободис. $\varphi \Rightarrow$
 $\Rightarrow f * g \exists \in D'(\mathbb{R}^n)$ и $(f * g, \varphi) = (f(x)g(y), \eta(y)\varphi(x, y))$;
 $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \eta(y) \in D(\mathbb{R}^n) -$ любая осн. φ -я, обр. $\forall \pm$ в
 некот. окр. $\text{supp}(g)$.

Св-ва:

• свертка в этом случае непрерывна отн. f и g : $\exists f_k \rightarrow 0$ по сл. фин. φ -ф.
 в $D'(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f_k * g \rightarrow 0$ в $D'(\mathbb{R}^n)$ и то же самое для g .

(14) сверточная алгебра

Теор. $f, g \in D_+(\mathbb{R}^1) \Rightarrow f * g \exists \in D_+(\mathbb{R}^1)$ и

$$(f * g, \varphi) = (f(t) \cdot g(\theta), \eta_1(t) \cdot \eta_n(\theta) \cdot \varphi(t+\theta)) \text{ где}$$

$\eta_1, \eta_n - \varphi$ -ч из $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ равные 1 в окр-ти $[0, \infty)$ и
 равны 0 при дост. больших отриц. t .

Опр мн-во A - алгебра, если на нем задана внутр. опер.,
 явл. ассоциативной.

D_+^1 - алг. (Оп. $*$)

Свойства сверточной алг.:

- 1) коммут.
- 2) имеет 1. ($\delta, \delta * f = f * \delta = f$)

* Ур-е св. алгебры:

$$a * u = f, a, f \in D_+^1$$

$\exists$ реш. $\Rightarrow$ фундаментальное реш. $\Rightarrow$ св. оператора $a * u$
 и обр. a^{-1} .

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = \delta$$

Теорема $\exists a^{-1} \exists \in D_+(\mathbb{R}^1) \Rightarrow \forall f \in D_+(\mathbb{R}^1)$ реш.

$$\text{ур-я: } a * u = f \text{ в } D_+(\mathbb{R}^1) \exists !: u = a^{-1} * f$$

1) $\rho \in D'(\mathbb{R}^n)$; $n=2, 3, \dots$ (15) Ньютоновский потенциал

$$V_3 = \frac{1}{|x|} * \rho, \quad V_2 = \ln \frac{1}{|x|} * \rho.$$

V_n - ньютонов потенциал:

$\exists \rho$ - плотностная ф-я $\Rightarrow \exists$ потенц. и эрв. ур-ю Пуассона:

$$\Delta V_3 = -4\pi\rho; \quad \Delta V_2 = -2\rho.$$

2) ρ - абс. конт., ограниченная ф-я в G .

$\rho = 0$ вне G .

$$V_3 = \int_G \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy; \quad V_2 = \int_G \rho(y) \cdot \ln \frac{1}{|x-y|} dy.$$

3) S - кусочно-гл. пов-ть, μ δ_S - потенц. простого слоя

$$(\mu \delta_S, \varphi) = \int \mu(x) \varphi(x) dS.$$

μ - плотность.

$-\frac{\partial}{\partial n} (\gamma \delta_S)$ - потенц. двойного слоя. ↓ поверхностные

Свойство:

локально инт-моя: $\forall V_3^{(0)}(x) = \int \frac{\mu(y)}{|x-y|} dS_y$

(16) Пространство Шварца

Опр S_∞ - линейное пр-во, эл-тами которого явл. ф-и из $C_\infty(\mathbb{R}^n)$, убывающие на ∞ вместе со своими производными быстрее $\forall$ степени $|x|$:

$$\exists C_{q,p} : |x^q D^p f(x)| < C_{q,p}.$$

Сходимость:

$$\forall p, q : x^q D^p \varphi_n(x) \Rightarrow x^q D^p \varphi$$

$$\Rightarrow \{\varphi_n\} \rightarrow \varphi \text{ в } S_\infty.$$

Опр Обобщенная функция медленного роста назыв. линейный непр. ф-и на S_∞

Операция умнож. в S_∞^* на ф-и из $C_\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$\varphi \in S_\infty^*(\mathbb{R}^n), \quad \alpha(x) = e^x$$

$$e^x \cdot \varphi(x) \notin S_\infty$$

Θ_n - мн-во ф-й из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, растущих на ∞ вместе со своими производными не быстрее полинома $|\partial^\alpha u(x)| \leq C_\alpha (1+|x|)^{m(\alpha)}$

$$\alpha(x) \cdot \varphi(x), \quad \alpha(x) \in \Theta_n, \quad \varphi(x) \in S_\infty \Rightarrow \alpha(x) \cdot \varphi(x) \in S_\infty.$$

Тем. (Шварца) Лин. φ -и f на $S_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ принадлежат $S'_{\infty}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow$

$\exists C > 0$ и $p \geq 0, p \in \mathbb{Z}$: $|(f, \varphi)| \leq C \|\varphi\|_p, \forall \varphi \in S_{\infty}$, где

$$\|\varphi\|_p = \sup_{\substack{|x| \leq p \\ x \in \mathbb{R}^n}} (1 + |x|)^p \cdot |\partial^{\alpha} \varphi(x)|$$

Л. (Шварца о структуре обобщ. φ -и с точечным носителем.)

$\supp f = \{0\} \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \partial^k \delta(x)$ - ее единств. предст.

Пример об. φ . медл. роста

$\exists |a_k| \leq C(1 + |k|)^N \Rightarrow \sum_k a_k \delta(x-k) \in S'_{\infty}$. (Владимиров стр 94)

17) Преобр. Фурье для S_{∞} , непрерывность

$$F[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{i(\xi, x)} dx \quad \text{стан. произв.}$$

$F[\varphi]$ - непрер и опр.

$$\partial^{\alpha} F[\varphi](\xi) = F[(ix)^{\alpha} \varphi(x)] \cdot (\xi)$$

$$F[\partial^{\alpha} \varphi] = (-i\xi)^{\alpha} F[\varphi](\xi)$$

Обратное:

$$\varphi(x) = F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]]$$

18) Фурье в S'_{∞} ; пример

$f \in S'_{\infty}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow F[f]$ опр. по φ -ам:

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi])$$

F - лин. непрер φ -и $\in S'_{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Обратное:

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot F[f(-x)], f \in S'_{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Фр. Фурье, отображающее $S'_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ в $S'_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ - взаимно однозначно и непрерывно.

Пример:

$$F[\delta(x-x_0)](\xi) = e^{i(\xi, x_0)}.$$

$$F[\delta(x-x_0)](\xi) = (\delta(x-x_0), F[\varphi](x)) = F[\varphi](x_0) = \int \varphi(\xi) e^{i(x_0, \xi)} d\xi = (e^{i(x_0, \xi)}, \varphi(\xi))$$

$$\Rightarrow F[\delta] = 1, \delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1]$$

$$F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi).$$

(22) Обобщ. решение лнн. д.у.р. от.

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u = f(x), \quad f \in D'(\mathbb{R}^n)$$

$$L(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$$

Ур-е: $L(x, \partial)u = f(x)$. (1)

Опр обобщенным решением линейного ДУ наз-ся ф-я $u \in D'(G)$, удовн. этому ур-ю в обобщ. смысле:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \quad (L(x, \partial)u, \varphi) = (f, \varphi)$$

$$f \in D'(\mathbb{R}^n)$$

$$\exists u \in S'_\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n), \varphi \in S_\infty(\mathbb{R}^n)$$

Зам. Классич. решение явл. обобщенным.

Лемма. $\exists f \in C(G)$ и обобщ. реш (1) в G принадл. $C^m(G)$.

Тогда оно явл. классическим.

(23) Фунд. решение

Опр Фундаментальным решением от. $\hat{L}(\partial)$ наз-в ф-я $\xi \in D'(\mathbb{R}^n)$ ($S'_\infty(\mathbb{R}^n)$): $L(\partial)\xi = \delta(x)$

Ф.р. опр с. точностью до $\ker \hat{L}$.

Лемма $\xi \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ — ф.реш. $\hat{L} \Leftrightarrow L(-i\xi)F[\xi] = 1$,
 $F[\xi]$ — преобр. Фурье, $L(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$.

$$F[\xi] = \frac{1}{L(-i\xi)}$$

$$L(-i\xi) = P(\xi)$$

$$P(\xi)X = 1 \quad (3)$$

$$X = \frac{1}{P(\xi)} \quad (2)$$

$$P(\xi) \neq 0.$$

1) нет корней $\Rightarrow$ считаем обр. ПР и находим реш.

2) есть $\Rightarrow$

$$N_P = \{\xi\} \quad P(\xi)$$

$\exists N_P \neq \emptyset \Rightarrow$ решение (3) не единств.: разное реш. отл.

Группа от других на обобщ. ф-ю с носителем N_P

это δ -ф-ии и их произв. (других нет)

Теор. (ур-е с правой частью)

$$L(\partial)u = f(x)$$

$$\exists f \in D(\mathbb{R}^n) (S'_0(\mathbb{R}^n)) : \varepsilon * f \exists v \in D(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$$

решение $\exists ! u = \varepsilon * f$. (ε - функ.)

① Ур-е $L(\partial)u = 0$ им. единств. реш. в классе ф-а, кот. сворачиваются с ε .

$$u = u * \delta \equiv u * (L(\partial)\varepsilon) = (L(\partial)u) * \varepsilon = 0 * \varepsilon = 0 \Rightarrow u = 0.$$

(24)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - a^2 \Delta \varepsilon = \delta(x, t) - \text{он теплопровод.}$$

$$F\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] - a^2 F_x[\Delta \varepsilon] = F_x[\delta(x, t)], \quad \delta(x, t) = \delta(x) \cdot \delta(t)$$

$$\bar{\varepsilon}(x, t) = \theta(t) e^{-a^2 |x|^2 t}.$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, t) &= F_x^{-1}[\bar{\varepsilon}](x, t) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{e^{-a|\xi|^2 t - i(x, \xi)}}_{\text{Ядро}} d\xi = \\ &= \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}. \end{aligned}$$

(25) Метод сдвига

$$(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$L\left(\partial, \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f(x) \delta(t), \quad f(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{где } L\left(\partial, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial t} L_{a_j}(\partial) + L_0(\partial)$$

$$\exists \{ \eta_k(t) \}_{k=1}^\infty \xrightarrow{R^1} 1, \quad k=1, 2, \dots \in D(R^1)$$

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x) \eta_k(t)) = (u, \varphi(x) 1(t)) \quad (\text{lim не зав. от } \{\eta_k\}).$$

Строим продолж. ф-на u_0 по (u_0, φ) .

Пример

$$u = f(x) \cdot \delta(t)$$

$$\begin{aligned} (u_0, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x) \eta_k(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot \delta(t), \varphi(x) \eta_k(t)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x), \varphi(x) \eta_k(0)) = (f, \varphi), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Теор. $\exists u \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ получается продолжение:

$$\begin{aligned} (u_0, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x) 1(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x) \eta_k(t)), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \\ \Rightarrow u_0 &\in D'(\mathbb{R}^n) \text{ удовн. } L_0(\partial)u_0 = f(x). \end{aligned}$$

Метод спуска, т.к. спускается по пер. пикт t .

От Лангмюра

$$\Delta E_n = \delta(x)$$

$$n=2: E_2 = \frac{1}{2\pi} \ln|x|$$

$$n=3: E_3 = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x|}$$

$$E_n(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} E_n(x, t) dt$$

(26) Ф.р. волнового от.

$$\square_n = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \right); \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \right) E_n(x, t) = \delta(x, t).$$

$$\frac{\partial^2 \bar{E}_n(\xi, t)}{\partial t^2} + a^2 |\xi|^2 \bar{E}_n(x, t) = 1(\xi) \cdot \delta(t).$$

$$\bar{E}_n(\xi, t) = \theta(t) \frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}$$

$$E_n(x, t) = F_3^{-1}[\bar{E}_n(\xi, t)] = \theta(t) F_3^{-1}\left[\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}\right]$$

(27) Под ф-я $f(x, t)$ из $\mathcal{D}'(K^{n+1})$ обр. в 0 при $t < 0$.

$V_n = E_n * f$, где E_n - функ. реш. волн. отра, назыв. ~~реш~~ волновым потенциалом с плотностью f .

(28) Задача Коши.

$$Lu \equiv u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \dots + a_n u = f(t), \quad t > 0.$$

$$u^{(k)}(0) = u_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

$\tilde{u}, \tilde{f}$ — продолжение сп-й функции при $t < 0$

$$\tilde{u}^{(k)} = \{u^{(k)}(t)\} + \sum_{j=0}^{k-1} u_j \delta^{(k-j-1)}(t) \quad k = 1, \dots, n.$$

$$L\tilde{u} = \{L\tilde{u}(t)\} + u_0 \delta^{(n)}(t) + (a_1 u_0 + u_1) \delta^{(n-1)}(t) + \dots + (a_{n-1} u_0 + \dots + a_1 u_{n-2} + u_{n-1}) \delta(t) = f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t).$$

$$L\tilde{u} = \tilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t)$$

Спрям. решение

$\varepsilon(t) = \theta(t) z(t)$ — функ. реш., $z(t)$ — реш. ур-я.

$$z(0) = z^{(i)} = 0 \quad i = \overline{1, n-2}, \quad z^{(n-1)}(0) = 1$$

$$u = \varepsilon(t) * (\tilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t))$$

$$u(t) = \int_0^t z(t-\tau) f(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^{(k)}(t) \quad \text{— решение}$$

(29) ЗК для волнового ур-я

$$\square_a u = f(x, t)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta\right) u(t, x) = f(t, x), \quad t > 0$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x)$$

$$f \in C(t \geq 0) \quad u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n), \quad u_1 \in C(\mathbb{R}^n)$$

$$\tilde{u} = \begin{cases} u, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \tilde{f} = \begin{cases} f, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\square_a \tilde{u} = \tilde{f}(x, t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t)$$

Нес. и пр. ур-я имеют роль источника, действ. при $t \geq 0$

$$(u, \square_a \varphi) = (F, \varphi)$$

Теор. $\exists F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, $F = 0$ при $t < 0$. Тогда реш. св-ств. задачи Коши $\exists!$ и представ. в виде волнового потенциала.

$$u = E_a * F.$$

Реш. непрерывно зависит от F в $\mathcal{D}'$.

(30) Реш. классич. зап. Коши.

Ф-на Кирхгофа ($n=3$) $u(x,t) = V_3(x,t) + V_3^{(0)}(x,t) + V_3^{(1)}(x,t)$

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int \frac{f(\xi, t - \frac{|x-\xi|}{a})}{(x-\xi)} d\xi + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{S(x,at)} u_1(S) dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S(x,at)} u_0(\xi) dS$$

Ф-на Пуассона ($n=2$)

$$u(x,t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\xi, \tau) d\xi d\tau}{u(x,at) \sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}} + \frac{1}{2\pi a} \int \frac{u_1(\xi) d\xi}{u(x,at) \sqrt{a^2 t^2 - |x-\xi|^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{u_0(\xi) d\xi}{u(x,at) \sqrt{a^2 t^2 - |x-\xi|^2}}$$

Ф-на Даламбера

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)]$$

(31) Тепловой потенциал

Опр. Тепловой потенциал

$f \in D'(R^{n+1})$ назыв. обобщ. ф-я $V = E * f$ с плотностью

$f: f(x,t) = 0$ при $t < 0$.

* есть какая-то дуальная теорема, мне в голову не приходит *
 может не существовать

Опр Проверк. тепловой потенциал $V(x,t)$ назыв.

потенциал с плотностью $u_0(x) \cdot \delta(t)$

$$V(x,t) = E_{(x,t)} * [u_0(x) \cdot \delta(t)] \in D'(R^n) = E(x,t) * u_0(x)$$

(32) Задача Коши для теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f \quad (*)$$

$$u|_{t=0} = u_0$$

Опр. Обобщ. з. Коши для ур. тепл. в плоск. $F(x, t) \in D'(R^{n+1})$, $u_0(x) \in D'(R^n)$, $u(x, t) \in D'(R^{n+1})$, обр. в 0 при $t < 0$ и удовл. (*)

$$\forall \varphi(x, t) \in D(R^{n+1})$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u, \varphi \right) = (F(x, t), \varphi)$$

$$u(x, t) = \mathcal{E}(x, t) * f(x, t) + \mathcal{E}(x, t) * u_0(x) = V + V^0$$

(33) Т. Фредгольма

ИУ Фредгольма:

$$\varphi = \lambda K \varphi + f \quad (*); \quad \psi = \lambda K^* \psi + g \quad (**) \quad \text{— сопряж. к (*)}$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_G k(x, y) \cdot \varphi(y) dy + f(x).$$

$$K - \text{ядро} \quad \int_G K(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

Альтерн. Фредгольма. ИУ разрешимо с непрер. ядром разрешимо в $C(\bar{G})$ при λ своб. члене $f \in C(\bar{G}) \Rightarrow \varphi(**)$ разр. в $C(\bar{G})$ при $\forall g \in C(\bar{G})$, решение!

Теор. Фр.

ИУ (*) разреш. в $C(\bar{G})$ не при $\forall \lambda$, го:

1) (*) и (**) имеют одинаковое (конечное) число ЛНЗ решений. (I Т. Фредгольма)

2) для разрешимости (*) необход. и дост., чтобы f был ортогонален ко всем реш-ям сопряженного (**)

(III Т. Фредгольма)

36) 3-ья теорема - Леувенс.

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu = -(pu')' + qu = \lambda u, \quad 0 \leq x \leq l. \\ h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0 \\ H_1 u(l) + H_2 u'(l) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$p \in C^1[0, l], \quad q \in C[0, l]$$

$$p > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad h_1, h_2, H_1, H_2 \geq 0$$

$$h_1 + h_2 > 0$$

$$H_1 + H_2 > 0$$

L с обл. опр., состоящая из p -й класса $C^2[0, l) \cap C^1(l, l]$,
удовл. (1), вторая, произв. $\in L_2(0, l)$
 $(L f, f) = \int_0^l (p |grad f|^2 + q |f|^2) dx + \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} |f|^2 ds, \quad f \in D_L$ -
интегр энергии

Т. $Lu = \lambda u + f$, при $u \in C.3.$ оп. L эквив.
 $u(x) = \lambda \int_0^l G(x, y) \cdot u(y) dy + \int_0^l G(x, y) f(y) dy$, где
 $G(x, y)$ - p -я функция.